Expresiones matemáticas

Exponenciales complejas

$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta \;\Rightarrow\; \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2}\left[e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right] \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2j}\left[e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right] \end{cases}$$

$$e^{j\theta} \pm 1 = e^{j\theta/2}\left[e^{j\theta/2} \pm e^{-j\theta/2}\right]; \qquad e^{-j\theta} \pm 1 = e^{-j\theta/2}\left[e^{-j\theta/2} \pm e^{j\theta/2}\right]$$

Números complejos

$$c = a + jb = |c|e^{j\theta} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \mathrm{Re}[c] = a = |c|\cos\theta & ; & \mathrm{Mod}[c] = |c| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \mathrm{Im}[c] = b = |c|\sin\theta & ; & \mathrm{Arg}[c] = \theta = \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) \end{Bmatrix}$$

$$c^* = a - jb = |c|e^{-j\theta} \;; \qquad |c| = \sqrt{cc^*}\,; \qquad \mathrm{Re}[c] = \frac{1}{2}[c + c^*]\,; \qquad \mathrm{Im}[c] = \frac{1}{2j}[c - c^*]$$

Relaciones trigonométricas

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \quad \Rightarrow \begin{cases} \cos^2\theta = \dfrac{1}{2}\,[1 + \cos 2\theta] \\ \sin^2\theta = \dfrac{1}{2}\,[1 - \cos 2\theta] \end{cases}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\left.\begin{aligned} \cos(A \pm B) &= \cos A\cos B \mp \sin A\sin B \\ \sin(A \pm B) &= \sin A\cos B \pm \cos A\sin B \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \cos A\cos B = \dfrac{1}{2}\,[\cos(A - B) + \cos(A + B)] \\ \sin A\sin B = \dfrac{1}{2}\,[\cos(A - B) - \cos(A + B)] \\ \sin A\cos B = \dfrac{1}{2}\,[\sin(A - B) + \sin(A + B)] \end{cases}$$

Propiedades de simetría

Simetría par: $x(t) = x(-t)$
Simetría impar: $x(t) = -x(-t)$ $\Rightarrow$

- par · par = par ; par + par = par
- impar · impar = par ; impar + impar = impar
- par · impar = impar

Simetría en media onda: $x(t) = -x(t \pm T/2)$, supuesto que $x(t) = x(t + T)$

Descomposición: $\forall x(t),\; x(t) = x_e(t) + x_o(t) \;\Rightarrow \begin{cases} x_e(t) = \frac{1}{2}\,[x(t) + x(-t)] = \text{componente par} \\ x_o(t) = \frac{1}{2}\,[x(t) - x(-t)] = \text{componente impar} \end{cases}$

Propiedades de la delta de Dirac

Definición: $\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t)$; Escalado: $\delta(at + b) = \frac{1}{|a|}\,\delta\left(t + \frac{b}{a}\right)$; Área unidad: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$

Propiedad de muestreo: $\begin{cases} x(t)\cdot\delta(t) = x(0)\cdot\delta(t) \\ x(t)\cdot\delta(t - t_0) = x(t_0)\cdot\delta(t - t_0) \end{cases}$

Propiedad de desplazamiento: $\begin{cases} x(t) * \delta(t) = x(t) \\ x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \end{cases}$

Transformadas y series de Fourier

FT y FS: Definiciones

	Transformada de Fourier (FT)	Serie de Fourier (FS)
Ec. de síntesis	$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{j2\pi ft}\, df$	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{j2\pi kf_0t}$
Ec. de análisis	$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt$	$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi kf_0t}dt$

FS trigonométrica: $x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(2\pi kf_0t) + b_k\sin(2\pi kf_0t)]$; $c_k = a_k - jb_k$; $x(t)$ real

FT y FS: Propiedades

	Señal temporal $\boldsymbol{x(t), y(t)}$	Transformada (FT) $\boldsymbol{X(f), Y(f)}$	Serie (FS) $\boldsymbol{c_{(x)k}, c_{(y)k}}$
Linealidad	$ax(t) + by(t)$	$aX(f) + bY(f)$	$ac_{(x)k} + bc_{(y)k}$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-f)$	c_{-k}^*
Inversión temporal	$x(-t)$	$X(-f)$	c_{-k}
Desplazamiento en DC	$x(t) + A$	$X(f) + A\delta(f)$	$c_k\ (\forall k \neq 0)$; $c_0 + A$
Desplazamiento temporal	$x(t-t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi ft_0}$	$c_k\, e^{-j2\pi kf_0t_0}$
Desplazamiento frecuencial	$x(t)e^{j2\pi f_0t}$	$X(f-f_0)$	
Escalado	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\,X\left(\frac{f}{a}\right)$	c_k
Convolución	$x(t) * y(t)$	$X(f)Y(f)$	
Modulación	$x(t)y(t)$	$X(f) * Y(f)$	
Derivación	$\frac{d}{dt}x(t)$	$j2\pi f\, X(f)$	
Dualidad	$X(t)$	$x(-f)$	$\nexists$
Energía (Rayleigh)	$E = \int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	$E = \int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(f)\rvert^2 df$	
Potencia (Parseval)	$P = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} \lvert x(t)\rvert^2 dt$		$P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert c_k\rvert^2$

Relación entre FT y FS: espectro continuo y discreto

$x(t)$ = señal no periódica $\rightleftharpoons$ espectro continuo $X(f) = FT[\,x(t)]$	$c_k = \frac{1}{T_0}X(f = kf_0)$
versión periódica $x_p(t)$ $\rightleftharpoons$ espectro discreto $X_p(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k\delta(f - kf_0)$	

Se entiende que $x_p(t) = x(t) * \sum_{-\infty}^{\infty}\delta(t - nT_0)$; donde $n \in \mathbb{Z}$, $T_0 = 1/f_0$ = periodo

FT y FS: Simetrías

Señal temporal $x(t)$	Transformada $X(f)$	Serie c_k
$x(t)$ = señal real	$X(f) = X^*(-f)$: simetría hermítica $(f)\| = \|X(-f)\|$: par $g[X(f)] = -\mathrm{Arg}[X(-f)]$: impar $\mathrm{Re}[X(f)] = \mathrm{Re}[X(-f)]$: par $\mathrm{Im}[X(f)] = -\mathrm{Im}[X(-f)]$: impar	$c_k = c_{-k}^*$: simetría hermítica $\begin{cases} \|c_k\| = \|c_{-k}\| \\ \mathrm{Arg}[c_k] = -\mathrm{Arg}[c_{-k}] \end{cases}$: par / : impar $\begin{cases} \mathrm{Re}[c_k] = \mathrm{Re}[c_{-k}] \\ \mathrm{Im}[c_k] = -\mathrm{Im}[c_{-k}] \end{cases}$: par / : impar
$x(t)$ = real par	$X(f) = \mathrm{Re}[X(f)]$ = real y par	$c_k = \mathrm{Re}[c_k]$ = real y par
$x(t)$ = real impar	$X(f) = j\mathrm{Im}[X(f)]$ = imaginario e impar	$c_k = j\mathrm{Im}[c_k]$ = imaginario e impar
$x(t)$ de media onda		$c_k = 0,\ \forall k$ par

FT: Pares transformados

	Señal temporal $x(t)$	Transformada $X(f)$
Impulso unitario	$\delta(t)$	1
Impulso unitario desplazado	$\delta(t - t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}$
Exponencial compleja	$e^{j(2\pi f_0 t + \theta)}$	$e^{j\theta}\,\delta(f - f_0)$
Función coseno	$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
Función seno	$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
Pulso rectangular	$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1, & \|t\| < \tau/2 \\ 0, & \|t\| > \tau/2 \end{cases}$	$\tau\,\mathrm{sinc}(\tau f)$
Pulso triangular	$\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{\|t\|}{\tau}, & \|t\| < \tau \\ 0, & \|t\| > \tau \end{cases}$	$\tau\,\mathrm{sinc}^2(\tau f)$
Tren de impulsos	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$	$\frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - k\frac{1}{T_0}\right)$

Convolución de funciones

Definición: $x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)\,d\tau$

Definición para señales periódicas de periodo T: $x(t) \circledast y(t) = \frac{1}{T}\int_0^T x(\tau)y(t-\tau)\,d\tau$

Propiedad conmutativa: $x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$

Propiedad asociativa: $x(t) * [y(t) * z(t)] = [x(t) * y(t)] * z(t)$

Propiedad distributiva: $x(t) * [y(t) + z(t)] = [x(t) * y(t)] + [x(t) * z(t)]$

Derivación: $\frac{d}{dt}[x(t) * y(t)] = \left[\frac{d}{dt}x(t)\right] * y(t) = x(t) * \left[\frac{d}{dt}y(t)\right]$

Elemento neutro: $x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = x(t)$